

教科書「2 次関数」から見た学習内容の低下 *

稲 永 善 数**

About the fall of the learning contents which I watched from a textbook
“quadratic functions”

Yoshikazu INENAGA

1. はじめに

工業高等専門学校（高専）教科書の「2 次関数」の扱いは、約 10 ページ、一方検定教科書は、各社 30 ページをはるかに超えている。数学 I では年間の約 1/4 を「2 次関数」の指導にかけている。果たしてそれだけ時間をかけるだけの価値が「2 次関数」にあるのだろうか？

毎年繰り返されるセンター試験は、2 次関数が出題される。次第に文字が増え、計算力に時間を要し、数学の本道から外れた複雑な 2 次関数の問題に、現場教師の多くは辟易しながら、生徒にとって人生にかかわる「2 次関数」の指導に血眼になっている。そこで、次のような観点から「2 次方程式」や「2 次関数」の章に絞り、以下の内容について考察する。

1. 教科書の「2 次関数」の時代的記述の変遷
2. 教科書における紙面に占める「2 次方程式」「2 次関数」の割合
3. アメリカや中国のテキストの「2 次関数」の扱い
4. 現代の教科書における他の章との流れ、数学教育上、自然な流れとなっているか

2. 2 次関数記述における歴史的変遷

教科書記述の特徴と歴史的背景

① 現代化運動以前

昭和 30 年（1955）、昭和 31 年実施の高等学校指導要領の発表があり、数学 I、II、III、応用数学に分かれた。戦後の生活単元学習は、生徒の著しい学力の低下を招いたため、法的拘束力をもつ指導要領の実施と

なった。

2 次関数に関しては、対応表を与えることにより、グラフの性質を考えさせることが目標となっている。

② 現代化運動時代

昭和 44 年（1969）、昭和 48 年実施の指導要領が告示された。現代化を目指した教育課程が発足する。事象を数学的に捉え、論理的、総合的、発展的に考察、処理する能力と態度を育成、社会に対して数学の果たす役割について認識させることに目標をおいた。

2 次関数に関しては、方眼紙、対応表が消え、グラフの位置関係が指導の中心となった。現代化運動以降は、写像とグラフの平行移動が指導の重要目標となった。

③ 現代化運動の修正と反省の時代

昭和 53 年（1978）高等学校指導要領が告示される。高等学校進学率が 92.6%となり、現代化教育についていけない生徒の増加で、「スローラーナー」数学教育の必要性が盛んに叫ばれるようになった。学習指導要領の内容の多さと学習程度の高さにその原因があったためである。

2 次関数に関しては、写像の概念が消え、グラフの平行移動の性質からグラフを描かせることが指導の中心となった。

④ 昭和 60 年代以降

グラフを描かせることが主な目標となり、グラフ 1 つ 1 つに多くの類題を与えドリル化した教科書が主流を占めるようになる。この傾向はまだ続いており、多色刷りで挿絵、漫画が入った教科書も登場するようになる。

* 原稿受付 平成 19 年 9 月 28 日

** 佐世保工業高等専門学校 一般科目

3. 数学Ⅰにおける「2次関数」の占める割合

平成6年施行の学習指導要領から、数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、A、B、Cというように細分化され、数学Ⅰでは、「2次関数、図形と計量、個数の処理」の3単位となった。平成15年施行の学習指導要領も「数学基礎」教科が増えたものの、数学Ⅰでは、「方程式と不等式、2次関数、図形と計量」で3単位である。まず、平成14年発行の各社数学Ⅰ、「2次方程式」「2次関数」の占める紙面の割合から考察する。

- ① 平成15年試行後の「2次関数」の紙面の占める割合
- 昭和57年施行以前では、「2次関数」は、「関数」の1つとして扱っている。内容も豊富なことから現在重なっている部分の「2次方程式」や「2次関数」を対象としている。
- すなわち、「複素数」や「分数関数」や「無理関数」はカウントしないものとする。

平成14年の教科書

上段が2次方程式、下段が、数学Ⅰ全頁に対して2次関数の紙面に占めるページ数と割合である。

実教出版	啓林館	第一学習	東京書籍
10(7.0%)	9(6.6%)	8(8.8%)	9(6.3%)
38(24.8%)	39(28.8%)	36(40%)	36(25.3%)

これは、週3時間の教育課程であることから、年間の授業時数を計算する。

最も2次関数のページ数が多い「第一学習社」の36ページを、単純に計算すると、授業時数は年間で

$35 \times 3 \times 0.4 = 42$ 時間

最も少ない「実教出版社」では年間で

$35 \times 3 \times 0.248 = 26$ 時間

である。

- ② 昭和56～58年の「2次関数」の紙面の占める割合
- 各社の「方程式」「2次関数」の教科書に占めるページ数を考える。

数研出版 (昭和58年)	啓林館 (昭和56年)	旺文社 (昭和58年)
15(8.3%)	12(6.9%)	13(6.8%)
20(11.1%)	20(11.6%)	19(10%)

ただし、複素数を含む。上段が2次方程式、下段が2次関数の紙面に占めるページ数と割合である。

週6時間の履修単位であるので2次関数のページが多い「啓林館」の例では、授業時数は、年間で

$35 \times 6 \times 0.116 = 24.4$ 時間

最も少ない「旺文社」では 授業時間は年間で

$35 \times 6 \times 0.1 = 21$ 時間

である。

現代の方が、以前よりも2倍弱の時間を賭け2次関数の指導を行っている。

- ③ 授業時間数の違いの原因について
- 同じ教材でこのような授業時間数の違いの原因は何か、次のことが考えられる。

- * 数学Ⅰと数学Aの教科の分割によって、従来の授業の連動性、連続性が断ち切られたこと
 - * 「平行移動」という数学の重要な概念を前面に見据えて記述できない教科書の事情から、類題が増えドリル的な記述によって、教科書の紙面を増やしたこと
 - * 生徒の学習力低下によって、各社分かりやすい教科書づくりに力を入れたこと、挿絵、漫画などの挿入によりページ数が増加したこと
 - * 2次関数指導が単なるグラフを描かせることが授業目的となり、その最大値や最小値、2次不等式の解法などの部分的な技術論に指導がシフトしたこと
 - * センター試験の影響・・・数学ⅠAで必ず、100点満点中、15～20点分が出題されるため、現場では、センター試験対応の問題をやらなければならない状況にあること、教科書各社もセンター試験の類題を増やしたこと
- などが考えられる。

4. 指導目標の変化

指導の目標の変化について考察する.

① 昭和45年10月の指導要領

学習指導要領による現代化運動から,「写像の概念を理解させ,また,基本的な関数の特徴を理解させる」として,2次関数を関数の1つの例とした軽い扱いとなっている.これは,アメリカなどの外国の扱いと同じような立場をとっている.

② 平成15年実施の学習指導要領

2次関数について理解し,関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに,それを具体的な事象の考察や二次不等式を解くなどに活用できるようにする」とあり,「2次関数」そのものの学習を前面に押し出している.

③ 教科書記述内容の比較

昭和59年検定の教科書では,

3章の「関数」 第1節 「2次関数」

第2節 「いろいろな関数」

となっている.具体的な直線の方程式から,関数の定義を行い,定義域,値域,平行移動,対称移動を学んだ後に,2次関数を与えている.その紙面に要するページ数は,頂点の座標を与えるまでに4ページである.多くの教科書は,次のような記述になっている.最後のまとめとして,「平行移動の概念」を用いた方法で,以下ように締めくくっている.

2次関数のグラフ

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

1. 放物線 $y = ax^2$ を, x 軸方向に p ,
 y 軸方向に q だけ平行移動したものである.
2. 頂点の座標は (p, q) x 軸の方程式は
 $x = p$
3. $a > 0$ ならば 下に凸 $a < 0$ ならば 上に凸

同じ内容で,平成14年の教科書の記述は,8ページを要している.しかも,頂点の座標をわざわざ与えるという丁寧さである.

2次関数

$$y = ax^2 + bx + c \text{ は, } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と変形できる.よってこのグラフは, $y = ax^2$ のグラフ

を x 軸方向に $-\frac{b}{2a}$

y 軸方向に $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ だけ平行移動した放

物線である.軸は 直線 $x = -\frac{b}{2a}$, 頂点は

$$\text{点}\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

上記のように頂点や軸を公式化するような,現代の記述が,紙面を割くほど数学的に本質的なものかどうか疑問である.

「写像」や「関数」の概念,数学の有効な手段の1つである「平行移動」の概念をおろそかにして,「2次関数」だけを金科玉条的に記述しなければならない教科書事情を読み取ることができる.

5. アメリカ,中国のテキスト

ここで,アメリカや中国のテキストにおける「2次関数」の扱いについて考える.

① アメリカのテキスト

アメリカ「Merrill」社のテキストで,「代数Ⅰ,Ⅱ,解析,幾何,統計」からなり,統計や解析は大学教養程度の記述がなされている.各巻 約600から900ページからなり,章ごとに意味づけ,具体例からの導入,他の学問との関係や応用例など材料が豊富である.代数Ⅱで扱っている「2次関数」をとりあげる.代数Ⅱでは,

「方程式・不等式 関数(座標, 1 次関数, 円, 不連続な関数, 領域など)」,

「連立方程式・領域・行列式」, 「多項式」,

「平方根・複素数の計算」, 「無理方程式の計算」,

「2 次方程式」, 「2 次関数」,

「2 次曲線(円, 楕円, 双曲線, 放物線)」

「多項式の関数(逆関数, 合成関数)」, 「有理関数」,

「対数関数・指数関数」, 「数列」, 「順列と組合せ」,

「確率」, 「三角関数」

609 ページ中「2 次関数」は, 28 ページ(導入, 2 次不等式を含む)すなわち, テキストの 4.6% (教材の範囲が異なるので比較にはならないが)に相当する. 関数の特殊な 1 つの例として「2 次関数」を扱っている.

② 中国のテキスト

中国の教科書, 全日制中学校数学教学大綱 では, 「代数上, 下」, 「立体幾何」, 「平面解析幾何」の 4 冊を学ぶ. 国家教育委員会の 1990 年制訂, 「平面解析幾何」の教科書では,

第 1 章 「直線」, 第 2 章 「円錐曲線」, 第 3 章 「媒介変数・極座標」

からなり, 1 冊 147 ページである.

「円錐曲線」の 1 つ「放物線」の 1 つの特殊な例として, 「2 次関数」を扱っており, 「平行移動」の概念を述べて説明しているに過ぎない. その記述 2 ページ (1.4% 弱) である.

いずれにしても, 関数例の 1 つ, あるいは放物線の例として「2 次関数」のグラフを扱っており, 日本の教科書のように, 「2 次関数」だけを特別扱いしてはいない.

また, フィンランドの教科書は, 特別に

$y = ax^2 + bx + c$ を与えていない. 多項式の 1 つとして 2 次式を扱っており, グラフは写像の立場から, 次のように記述している.

$$x \xrightarrow{f} y: y = kx^2$$

$k = \frac{1}{4}, k = \frac{4}{3}$ のそれぞれのグラフを描け.

記号論理に徹した教科書記述である.

6. センター試験の影響

昭和 57 年以降から, 教科書における「2 次関数」の扱いが突出した原因の 1 つとして, 「数学 I」, 「数学 A」と教科書が分冊になったこと,

さらに, センター試験が, 「2 次関数」の問題を抜きにした設問がありえないことにある. 100 点中 15~20 点を占め, 受験では避けて通ることができない教材のひとつである. 過去すべてのセンター試験では, 頂点を求める問題, 最大値や最小値など, 問題が固定化されており, 現場では, その指導が集中的に行われる傾向が強い. その証拠として過去のセンター試験の「2 次関数」の問題ばかりを並べると明白になるがここでは省略する.

7. 教材の流れ

(1) 昭和 59 年の数学 I では, 次のような教材の配置 6 単位

1 章 数と式

- ① 整式の四則計算(割り算を含む), 因数分解, 最大公約数, 最小公倍数
- ② 分数式の四則計算, 指数の拡張と指数法則
- ③ 平方根の計算, 数の拡張と無理数, 集合

2 章 方程式・不等式

- ① 方程式の解, 複素数, 判別式, 解と係数の関係, 2 次方程式の解と因数分解
- ② 高次方程式の解法, 連立方程式
- ③ 不等式の解, 2 次不等式の解法
- ④ 恒等式, 不等式の証明

3 章 関数

- ① 2 次関数, 平行移動, 2 次関数のグラフ, 最大値, 最小値, 2 次関数の決定, グラフと不等式
- ② いろいろな関数
分数関数, 無理関数, 逆関数とグラフ

4 章 図形と方程式

- ① 点と直線, 直線の方程式, 2 直線の関係
- ② 円の方方程式, 円と直線, 接線, 軌跡と方程式, 不等式と領域
- ③ 条件と命題, 必要条件, 十分条件, 命題, 条件と集合, 逆と命題

教科書「2次関数」から観た学習内容の低下

5章 三角比

- ① 直角三角形と正接, 正弦, 余弦, 三角比の性質
- ② 三角形の応用, 正弦定理, 余弦定理, 三角形の面積

(2) 平成14年の数学I・Aでは, 次のような教材の配置 5単位

数学I 3単位

1章 数と式

- ① 整式, 整式の加法, 減法, 乗法
除法の計算, 最大公約数, 最小公倍数はない
- ② 実数, 平方根を含む計算
指数法則の整数までの拡張, 集合はない

2章 方程式・不等式

- ① 不等式とその性質, 1次不等式の解法と応用, 2次方程式
2次不等式の解法や恒等式, 不等式の証明はない
- ② 2次方程式の解法, 解の公式, 実数解の個数
判別式という用語が使えない. 2次方程式の解と因数分解の関係はない. 恒等式や不等式の証明もない

3章 2次関数

- ① 関数, 2次関数とグラフ, 2次関数の決定, 最大値, 最小値
- ② 2次関数のグラフと2次不等式
2次関数のグラフとx軸の共有点, 2次不等式
平行移動の概念は, 2次関数のグラフに限っている. 分数関数や無理関数はない

4章 図形と計量

- ① 鋭角の三角形, 正接, 正弦, 余弦
- ② 三角比の拡張, 三角比の性質
- ③ 三角形の応用, 余弦定理, 正弦定理, 三角形の面積
- ④ 図形の計量, 相似と計量, 球の体積と表面積
三角比の内容は, 従来の分と変化はない. しかし, 中学校からの流れから, ④の内容が増えている.

数学A 2単位

1章 集合と場合の数

- ① 集合の要素の個数

② 順列

③ 組合せ

2章 確率

- ① 確率とその基本性質,
- ② いろいろな確率計算, 独立試行とその確率

3章 論理と集合

条件と命題, 逆, 裏, 対偶

4章 平面図形

- ① 三角形の性質, 三角形の5心,
三角形の辺の比の定理
- ② 円の性質, 円周角, 円の接線,
方べきの定理, 2つの円

2単位, 「数学A」最後の章「平面図形」にかかる時間がとれずに省略されるか, 駆け足で授業が行われている現場の状況がある.

(3) 数学Iと数学Aの教材の配置

各高等学校は, 数学Iと数学Aを1科目として捉え

直列学習 すなわち, 数学I → 数学Aの順に授業を行うものと, 2教科として独立したものとを考え

並列学習 数学I → 数学A

の並行授業を進める形をとっているものがある. また, 数学Aを履修しない場合もある.

ここでは, 特に, 数学Iの教材配列について考察する.

昭和59年以前の流れ

「2次方程式」では, 数の拡張としての「複素数」導入と四則計算, 2次方程式は, すでに解の公式を中学校で履修済みということから, すぐに「高次方程式の解法」「2次不等式の解法」へと進められていた. 不等式の解法は, 対応表を作ることにより, その正負を見た上で, 解を求める方法を用いている.

現在は, 「2次関数」のグラフを描いた後に, グラフを読み取る形で, 2次不等式の解を求めている. 確かに, この方が, 視覚的に不等式の解を見つけやすく生徒には理解できる. しかし, 2次関数をかけない場合, あるいは, 「3次や4次の不等式」の場合, 生徒はグラフで視覚化できるのか疑問が残る.

グラフが描けない限り不等式の解法ができない

ことになる. これは, 一般的な方法では決してないと考える.

不等式の解法だけに限らず, 一貫した指導がなされないと暗記科目になってしまう嫌いがある.

このような教材の配列から, 学習力低下の原因を見つけることができる. また, 現在では「2 次関数」を終えると, 「三角比」の学習になり, 「2 次関数」だけで, 「関数」の学習は終わりとなっている. 2 次関数のグラフを描くこと, 最大・最小値を求めることだけが, この章の目的となっている. 次のステップに繋がっていない.

昭和 59 年以前の教科書では, 「分数関数, 無理関数, 逆関数」など他の関数の存在とともに, 2 次関数の考え方を基にした概念を用いて, 同じようにグラフが描けることを学んできた.

このような流れは, 学習過程においては自然であり「生徒が理解できないから」という理由だけで, 切り捨ててよい教材ではないと考える.

さらに, 図形と方程式の章に移り, 解析幾何的な学習をすることは自然な流れである.

私たちは, 小学校 1 年生から「まわす」「ずらす」「折り曲げる」, すなわち「回転移動」「平行移動」「対称移動」の考え方は, 最重要課題として学んできた. この考え方は関数に限らず, 幾何や代数などの問題を含め, 応用力も多いものである. もっと高い立場で, 教科書の章立てを考える必要があり, この断片的な教材の配置に, 生徒の学習力低下の原因がある. 生徒ができないからといって, 例題, 類題を繰り返すドリルかされた「類推的な考え方」を強調するあまり, 「統合化」や「一般化」など, 他の数学の考え方を軽視した教材のあり方を指摘したい.

8. おわりに

以上のことから, 現在の教科書記述の特徴として次のようなことが特筆できる.

- (1) 断片的な教材のため, 単なる知識の断片として捉えるようになり, グラフを描くために「平方完成」の技術習得に迫られている.
- (2) 関数全体から「2 次関数」を捉えるという基本姿勢を見失っている.

- (3) 学習指導要領は, 数学教育の根幹をなすものであり, 社会の雰囲気によってのみ影響され, 未消化の議論をしないまま, 教材を動かすものではない. 動かした場合は, 徹底した検証をすべきである.

- (4) 3 年間で, 学習指導要領の教材研究を実施, 授業での失敗や反省を含めた教材研究を始める段階に, 次の学習指導要領の改訂が行われるため, 現場では未消化のまま見切り授業をしている.

以上のことから, 数学 I は, 90%以上の高等学校入学者が履修する科目であり, 歴史的にも

2 次方程式・不等式 → 関数 →

2 次関数 → 分数関数・無理関数

の流れは, 外国のテキストと比較しても本来の流れであり崩すべきではないと考える.

現在の章の流れは, 数学を単なる知識の断片として捉えるものであり, 従来の流れに戻すべきであると強調したい.

さらに, 今後の問題として次の問題を考える必要がある.

(1) 弧度法導入の時期

高専では, 4 月の段階で弧度法を導入, その授業に対して, 若干の違和感があるが, 5 月になると全員理解している. 検定教科書は, 一律の平均化された教材を求めるため, このことがかえって生徒の学力との不適合となっている. 指導要領の内容を吟味する必要がある.

- (2) 「三角比」を「三角関数」と独立した教材と考えていいのか.

外国の多くは「三角関数」を 1 つの教材として
加法定理 → 正弦, 余弦定理 の順に指導している.

(3) 現代化時代以前教材の再吟味

対数目盛り, 計算図表, 写像, 関数, 最大公約数, 最小公倍数など, 数学的に不要なのか? など多くの教材に対して吟味をする必要がある.

引用・参考文献

- 1) 稲永善数: 教科書数学 I にみる 30 年間の変遷, 日本数学教育学会誌
Vol. 75. No. 1, pp. 17-25 (1993)

教科書「2 次関数」から観た学習内容の低下

- 2) 教科書, 数学 I ,
実教出版 (株) 昭和 52 年以降,
東京書籍 (株) 昭和 44 年以降,
啓林館 (株) 昭和 32 年以降
平成 14 年 数学 I , 数学 A 数研, 第一学習社,
旺文社, 実教, 東京書籍
- 3) 高専数学 1, 森北出版 (株) , 昭和 43 年, 昭和 50
年, 平成 19 年
- 4) Algebra Two with Trigonometry, Foster, Rath
Winters, Merrill 社
- 5) 平面解析幾何, 国家教育委員会 (1990),
全日制中学校数学

